L'analyse non standard, théorie des ordres de grandeur

par **André Deledicq**

Extrait de Tangente Hors série n°13.

L'analyse non standard est un modèle mathématique dans lequel les adjectifs "petits" et "grands" peuvent prendre du sens. En particulier on peut les interpréter comme des nombres "infiniment petits" ou "infiniment grands", ou bien simplement très petits ou très grands.

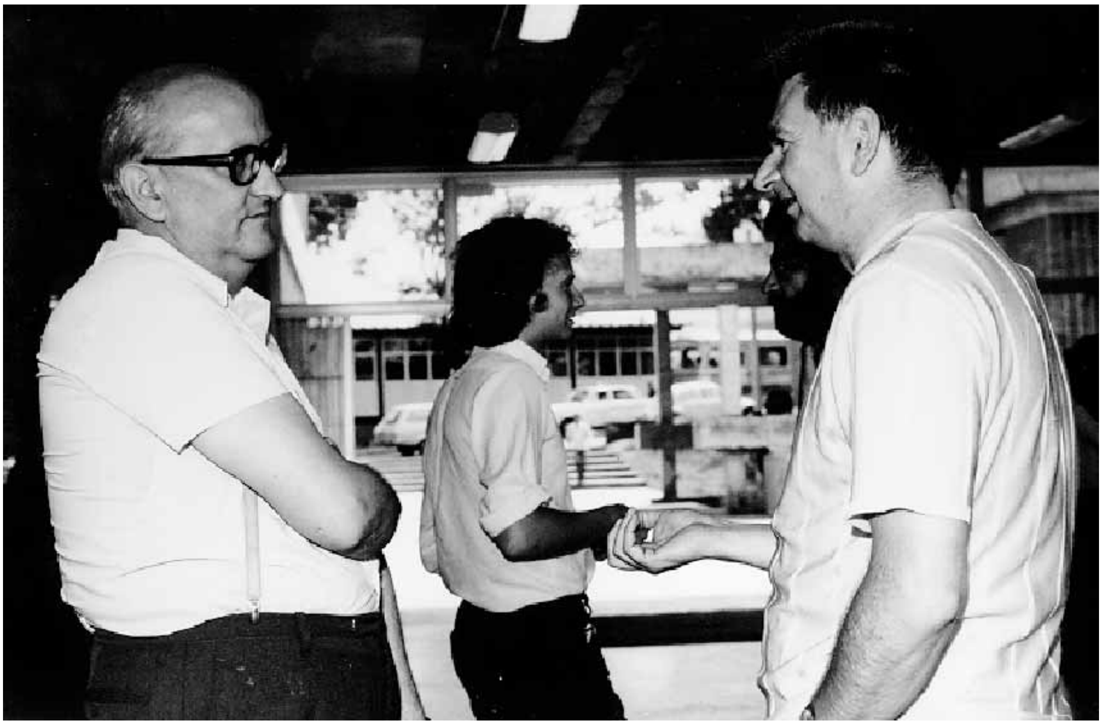
Abraham Robinson (1918-1974), l'inventeur de l'Analyse non standard en 1960.

Cela n'a l'air de rien, mais les mathématiciens ont mis trois siècles (de la fin du XVII^e à la fin du XX^e) pour découvrir la bonne manière de parler avec les adjectifs "petit" et "grand", c'est-à-dire celle qui assure la cohérence logique du discours. La difficulté essentielle consiste à concevoir l'inexistence de frontière, l'absence d'un nombre qui tienne lieu de limite entre les nombres petits et ceux qui ne le sont pas, ou entre les nombres non-grands et les grands.
En effet, en mathématique classique (ou plutôt "standard" comme on dit aujourd'hui), on bute sur l'apparente contradiction suivante : s'il y a des nombres "petits" et si l'on veut calculer avec ces nombres, alors la somme de deux nombres petits doit obligatoirement rester petite (sinon ce ne serait pas un bon modèle). Mais alors, par récurrence, tout multiple d'un nombre ϵ petit serait petit ; or n'importe quel nombre finit par être dépassé par un multiple de ϵ (c'est l'axiome dit d'Archimède) ; tous les nombres seraient donc petits et il n'y aurait qu'une seule sorte de nombres.
La mathématique *standard* affirme ainsi l'homogénéité absolue de l'ensemble des nombres réels ; la mathématique *non standard* y introduit des ordres de grandeur : il y a des nombres "petits", des nombres "appréciables" (à l'échelle de l'homme pourrait-on dire) et des nombres "grands".
Le modèle non standard est donc plus proche de la réalité, plus complet et plus pratique que le modèle standard qui ne sait pas parler des trois grands ordres de l'univers dont parlait Pascal (l'infiniment petit, l'homme et l'infiniment grand). Dans ce rapide article nous ne ferons qu'évoquer ses inventeurs, ses énoncés élémentaires et son utilité.

Au lieu de "infiniment", on doit préférer l'adverbe "très" ; en effet, une chose très grande n'est pas forcément "infinie", même si elle est immensément grande.

L'origine de l'ANS

C'est Abraham Robinson qui mit au point en 1960, sous le nom de "Non Standard Analysis", la théorie qui rendait possible un discours non contradictoire sur des êtres "hyper-réels" : les nombres infiniment petits et les nombres infiniment grands. Sa construction n'est pas très simple, bien sûr, mais, surtout, elle oblige à une modification profonde de la conception des nombres, nécessitant une gymnastique intellectuelle peu naturelle chez un non-mathématicien.
Heureusement Edward Nelson, trouva en 1977, le moyen d'axiomatiser cette jeune théorie des ordres de grandeur sans toucher au bon vieux corps des nombres réels. Revenant aux sources des mathématiques il propose d'adjoindre à la théorie des ensembles classique, trois axiomes ; les noms qu'il leur donne laisse bien présager de leur abstraite nature : **i**déalisation, **s**tandardisation et **t**ransfert. Tout en devenant facilement manipulable, la théorie dite IST (*Internal Set Theory*) reste cependant peu explicable à des débutants ou à des élèves.
C'est Georges Reeb qui, en France dès les années soixante-dix, comprit l'importance et la justesse de l'Analyse Non Standard et réunit une équipe de jeunes mathématiciens autour de lui. À partir de ces idées, l'un de ces élèves, Marc Diener, bâtit un cours de DEUG sur le sujet à l'Université Paris 7 en 1989 (*) avec votre serviteur (André Deledicq) qui développa une présentation élémentaire dont le début est résumé page suivante ; la théorie est maintenant devenue très accessible grâce, par exemple au travail subséquent d'Abdenacer Makhlouf et de Robert Lutz paru à l'APMEP (*Fondements pour un enseignement de l'Analyse en terme d'ordres de grandeur : les réels dévoilés* - 1996).



Conversation entre George Reeb (à gauche) et René Thom lors d'un congrès à Bahia en 1971.
George Reeb a dû batailler longtemps pour faire comprendre aux mathématiciens français la Révolution-Révélation du Non-Standard...

L'ANS élémentaire en cinq notes

La Différenciation des Ordres de grandeur :

• Il y a des nombres mesurant des choses "petites", des nombres mesurant des choses "grandes" et des nombres mesurant des choses ni petites ni grandes (appelées "appréciables").

(DO) affirme l'existence dans $\mathbb{R}^+$ de trois classes de nombres auxquels on peut penser comme des nombres "**infiniment petits**", des nombres **appréciables** et des nombres "**infiniment grands**".

Au lieu de "infiniment", nous préférerons l'adverbe "très" ; en effet, une chose très grande n'est pas forcément "infinie", même si elle est immensément grande.

Les mathématiciens parlent aussi de **idéalement petit**, en notant **ip** (ou bien parler de très-petit ou de i-petit, avec un tiret) et de **idéalement grand** en notant **ig** (ou bien très-grand ou i-grand).

La Répétition (en grand nombre) des Étapes (petites) :

• Pour changer d'ordre de grandeur par étapes très-petites, il faut un nombre d'étapes très-grand.

(RÉ) équivaut à l'affirmation plus formelle :

Si *e* est i-petit et *ne* non i-petit, alors c'est que *n* est i-grand.

Cette propriété est liée à un énoncé classique fondamental : celui du principe de RÉcurrence qui semble engendrer, sous sa forme standard, un paradoxe (voir page précédente). Dans le modèle non-standard ce principe est légèrement modifié par l'apparition des ordres de grandeur. Il devient le principe de "**récurrence pragmatique**" que voici :

SI UNE PROPRIÉTÉ EST VRAIE POUR 0, ET SI, SUPPOSÉE VRAIE POUR N, ELLE EST DÉMONTRÉE VRAIE POUR N + 1, ALORS CETTE PROPRIÉTÉ EST VRAIE POUR TOUS LES ENTIERS NON TRÈS-GRANDS.

Le Mécanisme des Inverses :

• Si x est i-petit non nul, alors $1/x$ est i-grand (et réciproquement !).

"MI" est l'énoncé qui affirme l'existence de "petits" dans $\mathbb{R}$ dès qu'on y postule l'existence de "grands" (ou inversement).

Les Frontières Absentes :

• Il n'existe pas de "frontière" définissable entre les nombres i-petits et les nombres non i-petits ; ni entre les non i-grands et les i-grands.

Certains débutants dans le modèle non-standard, souvent très "forts" en analyse, ressentent cet énoncé comme un véritable obstacle (il en est de même d'ailleurs pour l'énoncé du "principe de récurrence pragmatique").

Sous les Ordres de Leibniz :

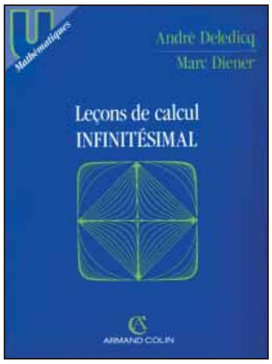
• Lorsqu'on fait des calculs avec les nombres i-petits, appréciables ou i-grands, on doit appliquer des règles de calcul que nous avons appelées "Règles de Leibniz".

Les voici résumées pour *les nombres positifs* :

ip + ip = ip	**app + app = app (ou 0)**
ip + ig = ig	**ip + app = app**
app + ig = ig	**ip × ip = ip**
app × app = app	**ig × ig = ig**
ip × app = ip	**ig × app = ig**

On remarque l'absence de règle donnant le résultat **ip × ig** ; mais c'est justement ce qui est intéressant.

Comme les règles algébriques standard, ces règles se démontrent facilement dans le modèle non-standard des nombres. Il est remarquable qu'elles correspondent à l'intuition que l'on a des

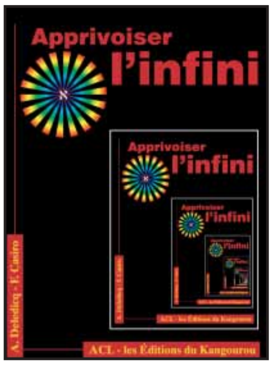


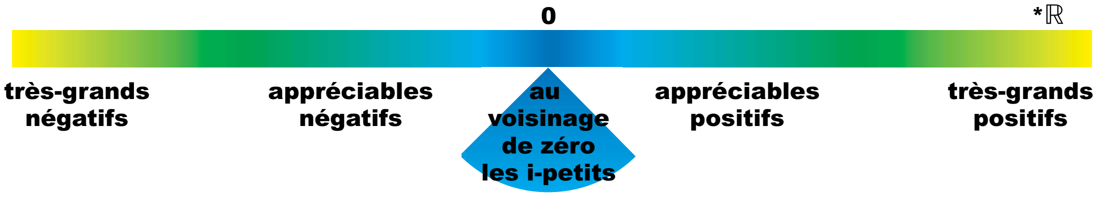
(*) Le livre *Leçons de calcul Infinitésimal*, **Marc Diener** et **André Deledicq**, éd. Colin, paru à la suite du premier cours d'ANS en France, est encore disponible chez ACL-Les Éditions du Kangourou.

On peut lire aussi, de l'auteur de cet article :

• *Est-il possible d'enseigner l'analyse aujourd'hui ?* Repères-IREM N° 24 juillet 1996.

• *Apprivoiser l'infini*, avec Francis Casiro, ACL-Les Éditions du Kangourou (nouvelle édition 2002).





ordres de grandeur et qu'en ont eu les mathématiciens des XVII^{e} et XVIII^{e} siècles qui inventèrent le **Calcul Infinitésimal**.

En résumé,

• **LE MODÈLE NON-STANDARD DES NOMBRES EST EXACTEMENT** : l'ensemble ℝ des nombres du modèle standard, avec toutes ses propriétés classiques déjà connues.

• Mais on a décidé de le colorier en trois couleurs (nombres i-petits, appréciables, i-grands) ;

• Certaines propriétés classiques doivent alors être précisées selon le comportement de ces couleurs (par exemple, le principe de récurrence).

Les applications

L'analyse non standard contient l'analyse classique standard à laquelle elle a simplement ajouté la notion d'ordre de grandeur. Il est donc naturel qu'elle en simplifie certaines démonstrations et qu'elle en fasse mieux comprendre certains aspects ; un peu comme le fait la géométrie dans l'espace pour la géométrie plane…

Ainsi, aujourd'hui, il n'est certainement plus possible d'étudier sérieusement le comportement des processus différentiels sans une formation en analyse non standard.

Mais surtout il y a des énoncés et des résultats que le vocabulaire de l'Analyse non standard permet de formuler et de discuter mais dont l'analyse classique standard ne sait pas parler.

Un exemple trivial mais très significatif est donné par le *Théorème du Boucher*.

Si ne est appréciable et que n n'est pas très grand c'est que e n'est pas très petit.

Ce théorème se déduit immédiatement de l'énoncé RÉ ci dessus (il en est tout simplement un contraposé par particularisation d'une des hypothèses) ; et il traduit une vérité pratique de tous les jours que nous pouvons illustrer (que la corporation des bouchers nous en excuse) par une situation marchande assez courante :

Si un boucher a utilisé un poids non négligeable de papier d'emballage à la fin de sa journée (alors que le nombre de ces clients reste appréciable puisqu'il a pu les servir), c'est que le poids d'une feuille de papier n'est pas négligeable…

Chacun tirera la morale commerciale de ce théorème que l'analyse non standard offre aux unions de consommateurs.

Terminons ce court exposé par un exemple plus complexe qui montre bien les limitations du modèle mathématique standard classique :

Que peut dire un mathématicien sur ce que devient une petite somme placée à un petit taux d'intérêt ? situation (malheureusement) fréquente dans nos sociétés de petits porteurs bien mal conseillés par nos grands argentiers…

Autrement dit, ***que dire de x^{1+t} lorsque x est voisin de 0 et t aussi** ?*

Le mathématicien classique est bien embêté car il *n'est pas armé pour traiter la tendance (simultanée mais non liée) de deux quantités vers* 0. Ainsi, posant $y = x^{1+t}$, peut il énoncer à la fois :

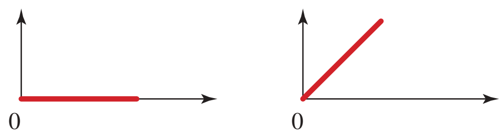
$$\lim_{t\to 0}\ \lim_{x\to 0} \frac{y}{x} = 0$$

ce qui, par ailleurs, traduit le fait que la dérivée de x^{1+t} à l'origine est nulle, et donc que la courbe se confond avec l'axe des abscisses !

$$\lim_{x\to 0}\ \lim_{t\to 0} \frac{y}{x} = 1,$$

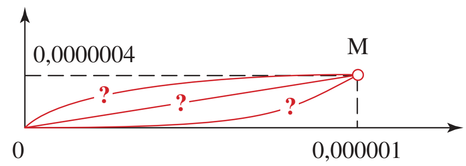
ce qui, par ailleurs, traduit le fait que le graphe de x^{1+t} est voisin de la première bissectrice !

Comment donc, sortir de ce paradoxe apparent : au voisinage de l'origine et pour t petit, le graphe de $y = x^{1+t}$ est à la fois proche de la première bissectrice et de l'axe des abscisses ?



Le mathématicien non standard, lui, sait dire un tout petit peu plus de choses sur cette situation.

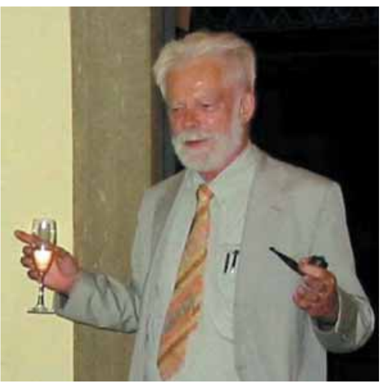
Par exemple, il sait répondre à la question pratique suivante : Sachant que $0^{1+0} = 0$ et que $(0{,}000001)^{1{,}07} \approx 0{,}0000004$



quelle est l'allure du graphe de la fonction entre 0 et M ? (Il s'agit évidemment de prévoir l'allure sans utiliser de calculatrice qui fait évidemment très bien le travail toute seule). On peut trouver la réponse à cette question sur le site : http://www.mathkang.org.

A. D.

Edward Nelson



Réponse

Quelle est l'allure du graphe $y = x^{1+t}$ pour t et x très petits, mais dans un système d'axes où les unités ont été choisies de manière que l'abscisse et l'ordonnée de M soient appréciables ? (On a pris l'exemple numérique $t = 0{,}07$ et $x_M = 0{,}000001$.)

Pour le savoir, faisons l'homothétie de rapport k très grand (égal à $1/x_M$) :

$$\begin{cases} X = kx \\ Y = ky \end{cases}$$

On a donc $Y = k\left(\dfrac{X}{k}\right)^{1+t} = X\left(\dfrac{1}{k}\right)^{t} X^{t}$.

Puisque M est appréciablement hors des axes, c'est que, pour $X = 1$, Y n'est pas très petit mais appréciable, comme donc $\left(\dfrac{1}{k}\right)^{t}$ que nous posons égal à a.

Évaluons alors la différence $Y - aX$:

$$Y - aX = a\,[\,X^{t} - 1\,]\,X.$$

Pour X entre 0 et 1, et t petit, X^{t} est très voisin de 1 et Y est donc très voisin de aX.

Le graphe cherché est donc très proche du segment [OM].