Concepts vagues et

Pas plus que la philosophie, la science ne peut se passer d'une réflexion sur le flou. Les frontières floues obligent à renoncer au principe classique selon lequel une proposition est soit vraie, soit fausse. Riches d'informations et propices aux paradoxes, elles stimulent la réflexion.

Pascal Ludwig


Rue des Archives

frontières floues

La science contemporaine est mue par un idéal de rigueur et de précision. Nous savons exactement ce qu'est une preuve mathématique, par exemple, et la définition d'un concept en géométrie ou en physique théorique ne doit souffrir d'aucune imprécision. N'y a-t-il pas, à cet égard, un gouffre entre le langage formalisé de la science contemporaine, d'un côté, et le langage naturel grâce auquel nous élaborons nos croyances et raisonnons dans la vie quotidienne, de l'autre ? Avant d'illustrer ce gouffre, considérons l'exemple suivant d'une limite floue. Nous serons tous d'accord pour affirmer que Charles de Gaulle était grand. Mais à quel moment exactement est-il devenu grand ? Nous serons certainement encore une fois tous d'accord pour dire qu'il n'était pas grand à sa naissance, ni même à l'âge de cinq ans.

Supposons que chacune des secondes durant lesquelles Charles de Gaulle a vécu soit donnée. À chaque seconde *t*, on peut se poser la question suivante : à cette seconde, Charles de Gaulle était-il, oui ou non, grand ? Certaines de ces questions ont des réponses positives – par exemple, à 50 secondes de son décès, Charles de Gaulle était bel et bien très grand –, et d'autres ont des réponses négatives. Mais peut-on vraiment dire qu'à chacune de ces secondes, il existe soit une réponse positive à la question posée, soit une réponse négative ? Si c'est le cas, cela signifie qu'il existe une seconde dans la vie de Charles de Gaulle à laquelle celui-ci cesse d'être petit, pour devenir grand. Mais quelle est cette seconde ? Si elle existe, nous n'avons absolument aucun moyen de la déterminer. Or est-il raisonnable d'affirmer l'existence de quelque chose que nous ne pourrions en aucun cas déterminer ni connaître ?

Si vous avez envie de répondre par la négative à cette question, vous devez penser que cette seconde n'existe tout simplement pas : en raison du flou de la frontière qui sépare l'ensemble des hommes de petite taille de l'ensemble des hommes de grande taille, il n'y a pas de seconde au cours de la vie de Charles de Gaulle à laquelle on pourrait affirmer que celui-ci est, pour la première fois, devenu grand. Cela peut sembler fort raisonnable ; pourtant, cela implique une violation d'un principe fondamental de la logique classique, le principe de bivalence.

1. Existe-t-il une seconde précise à laquelle Charles de Gaulle serait devenu grand ? L'ensemble des hommes grands étant séparé de l'ensemble des hommes petits par une frontière floue, nous ne savons pas déterminer quand Charles de Gaulle est devenu grand. Certains philosophes pensent qu'on peut attribuer un « degré de vérité » à la proposition qu'il ait été grand à tel ou tel moment de sa vie. D'autres pensent que ce moment singulier existe, mais que nous ne saurons jamais le déterminer.

Selon ce principe, toute proposition affirmative est soit vraie, soit fausse : aucune proposition n'est à la fois vraie et fausse, et aucune proposition n'est non plus ni vraie ni fausse. Or considérez maintenant la zone floue pendant laquelle Charles de Gaulle, qui était initialement un enfant de petite taille, est devenu un adulte de grande taille. Et supposons, conformément au raisonnement qui précède, qu'il n'y ait pas une seconde précise à laquelle Charles de Gaulle soit devenu grand. Cela implique qu'à certaines secondes de la vie de Charles de Gaulle, on ne peut ni affirmer correctement qu'il était grand ni le nier : ce n'était alors pas vrai qu'il était grand, mais ce n'était pas faux non plus. On voit qu'on a bien là une violation du principe de bivalence !

Nous nous trouvons donc face à un dilemme : ou bien nous rejetons, contre notre intuition, la thèse de l'existence d'une zone floue entre les hommes de grande taille et les hommes de petite taille, et nous affirmons qu'il existe une seconde – impossible à connaître – à laquelle Charles de Gaulle est devenu grand ; ou bien nous nous trouvons contraints d'abandonner un des principes fondamentaux de la logique classique, le principe de bivalence. Il s'agit d'un défi pour l'esprit, et d'un défi dont la portée est générale.

Caractéristiques des termes vagues

En effet, de très nombreux prédicats ont des extensions dont les limites sont floues : pour prendre quelques exemples, le raisonnement qui précède pourrait être reformulé en remplaçant *grand* par *vieux*, *rouge*, *adulte*, *chauve*, *bronzé*, etc. Or ces termes ont pour unique point commun d'être vagues. On peut, pour chacun d'entre eux, imaginer des cas frontières : il existe ainsi des nuances colorées dont on ne peut pas dire de façon déterminée si elles sont rouges ou orangées ; il existe des personnes dont on ne peut pas dire de façon déterminée si elles sont chauves ou non, si elles sont adultes ou non, bronzées ou non, vieilles ou non, etc. Les termes vagues, on le voit, n'ont pas d'extension précisément définie. Le terme « nombre entier positif multiple de 3 et inférieur à 576 » n'est pas vague, car on peut déterminer très exactement l'ensemble de ces nombres, dont on pourrait donner la liste exacte. Mais comment établir la liste exacte des personnes qui, en France, sont chauves ou bronzées ? C'est impossible, car aucune définition parfaitement exacte ne permet de distinguer un chauve d'un non-chauve dans un cas limite.

On sait depuis l'Antiquité, et en particulier depuis les écrits des philosophes stoïciens, que les termes vagues donnent lieu à ce qu'on appelle des paradoxes « sorites ». Dans l'Antiquité, ces paradoxes étaient formulés à l'aide de questions, de la façon suivante. Est-ce qu'un grain de sable constitue un tas ? Est-ce que deux grains de sable font un tas ? Est-ce que trois grains de sable font un tas ? … Est-ce que 100 000 grains de sable font un tas ? Si l'on considère qu'un grain ne fait pas un tas, et que l'adjonction d'un grain ne suffit pas à transformer en tas de sable quelque chose qui au départ n'est pas un tas de sable – il est évident par exemple qu'il ne suffit pas d'ajouter un grain à deux grains pour faire un tas –, on doit pouvoir conclure logiquement que 100 000 grains de sable ne constituent pas un tas… ce qui est absurde ! On peut aussi formuler les sorites comme des arguments ayant des propositions conditionnelles, de la forme « Si P, alors Q », pour prémisses :

Un grain de sable ne constitue pas un tas.

Si un grain de sable ne constitue pas un tas, un grain de plus, c'est-à-dire deux grains, non plus.

Si deux grains de sable ne constituent pas un tas, un grain de plus, c'est-à-dire trois grains, non plus.

[…]

Si 99 999 grains de sable ne constituent pas un tas, un grain de plus, c'est-à-dire 100 000 grains, non plus.

Conclusion : 100 000 grains de sable ne constituent pas un tas.

Un tel argument semble parfaitement acceptable, puisqu'il repose uniquement sur le principe semble-t-il inattaquable du *modus ponens*, selon lequel on peut dériver la proposition Q des prémisses P et de la règle « Si P, alors Q » (si P est vérifié, alors Q l'est aussi). Par ailleurs, si l'on accepte notre discussion précédente, les prémisses de l'argument sorite semblent vraies. Supposons en effet qu'une des prémisses de l'argument soit fausse. Cela voudrait dire que pour un certain nombre entier n, la proposition suivante est fausse : Si n grains de sable ne constituent pas un tas, n +1 grains non plus. Autrement dit, pour un certain nombre n, il devrait être vrai que n grains de sable ne constituent pas un tas, mais il devrait aussi être faux que n+1 grains ne constituent pas un tas de sable. Mais cela reviendrait à introduire une frontière exacte entre les tas de sable et les non-tas de sable. Si l'on considère que l'extension du terme *tas* est vague, et donc qu'il existe une frontière floue entre les tas et les non-tas, on voit mal comment l'on pourrait considérer P comme étant fausse.

Faut-il bannir le vague ?

Supposons d'une part que l'on refuse d'abandonner les principes fondamentaux de la logique classique que sont la bivalence et le *modus ponens*, mais que l'on accepte aussi l'intuition selon laquelle les extensions de termes vagues comme *grand*, *chauve*, ou *tas* possèdent des frontières vagues, et donnent donc lieu au paradoxe sorite du tas de sable. Puisque la conclusion des sorites n'est pas acceptable, une solution peut consister à essayer d'éliminer les termes vagues de notre discours.

Selon Gottlob Frege par exemple, l'un des pères fondateurs de la logique moderne, un prédicat se doit absolument d'avoir une extension dont les frontières sont parfaitement précises. Un prédicat peut dès lors être comparé à une fonction prenant pour domaine l'ensemble des objets dont on peut parler, et ayant pour valeur le vrai et le faux. La fonction prend la valeur *vrai* lorsque le prédicat s'applique correctement à un objet pris pour argument, la valeur *faux* sinon, et il n'y a pas de troisième possibilité. Mais cela n'a aucun sens s'il existe des frontières floues entre les extensions des concepts. La comparaison entre un prédicat et une fonction est très parlante dans des domaines où l'exactitude règne. Ainsi, on peut identifier le prédicat « être un nombre pair » à une fonction qui attribue la valeur *vrai* à tous les nombres divisibles par deux, et la valeur *faux* à tous les autres. Cette fonction est parfaitement bien définie, et elle renvoie une valeur (et une seule) pour tous les nombres. Mais nous savons que l'on ne peut appliquer cette image aux termes vagues de la langue naturelle : il y a certaines personnes dont on ne peut dire de façon justifiée ni qu'elles sont chauves ni qu'elles ne le sont pas.

Pour Frege, la loi de bivalence n'est pas négociable pour la raison humaine, et elle a pour corrélat que tout concept doit avoir une extension dont les frontières sont précisément déterminées. Un langage qui admet des termes vagues est donc un langage imparfait, impropre à remplir les buts des mathématiques et de la science ; dès lors, il ne faut pas s'étonner si un tel langage nous conduit à accepter des conclusions contradictoires, comme dans le cas des paradoxes sorites. On pourrait résumer la position de Frege par un slogan : pas de rationalité sans cohérence, et pas de cohérence sans une parfaite précision.

Faut-il conclure que les prédicats vagues ne peuvent être appliqués de façon cohérente aux objets du monde, et donc qu'il faut les exclure complètement de notre langage – si du moins nous recherchons à acquérir des connaissances sûres à propos du monde ? Cela reviendrait à affirmer qu'il n'y a, à rigoureusement parler, aucun objet qui soit *chauve*, *rouge*, *grand*, *vieux* ; aucun objet qui soit une personne, un animal, une plante – puisque toutes ces expressions peuvent donner lieu à des paradoxes sorites. C'est là une position bien difficile à tenir, pour ne pas dire une position suicidaire ! Certes, le langage des mathématiques ne contient pas de termes flous. Mais les choses se compliquent, y compris lorsqu'on veut rester dans le domaine strictement scientifique, et pour une raison évidente : il y a du vague dès lors qu'on introduit des termes d'observation dans un langage. En effet, c'est toujours l'existence d'un certain type d'expérience sensorielle qui justifie l'application correcte d'un terme d'observation. Par exemple, c'est parce que je vois une certaine fleur comme possédant une certaine couleur que je peux correctement lui appliquer le prédicat *rouge*. Or il y a des limites au pouvoir de discrimination des sens. Deux teintes colorées peuvent être réellement différentes, sans apparaître pour autant différentes à un observateur même attentif. Du coup, on est obligé d'admettre la vérité de la proposition suivante :

Si la teinte T_1 apparaît rouge, la teinte T_2, indiscernable visuellement de T_1, apparaît rouge également.

On peut facilement en tirer un paradoxe sorite : par petites variations de couleur impossibles à détecter, l'on peut passer du rouge à n'importe quelle couleur du spectre, et l'on est amené à conclure, par exemple, que le vert apparaît rouge, ce qui est absurde.

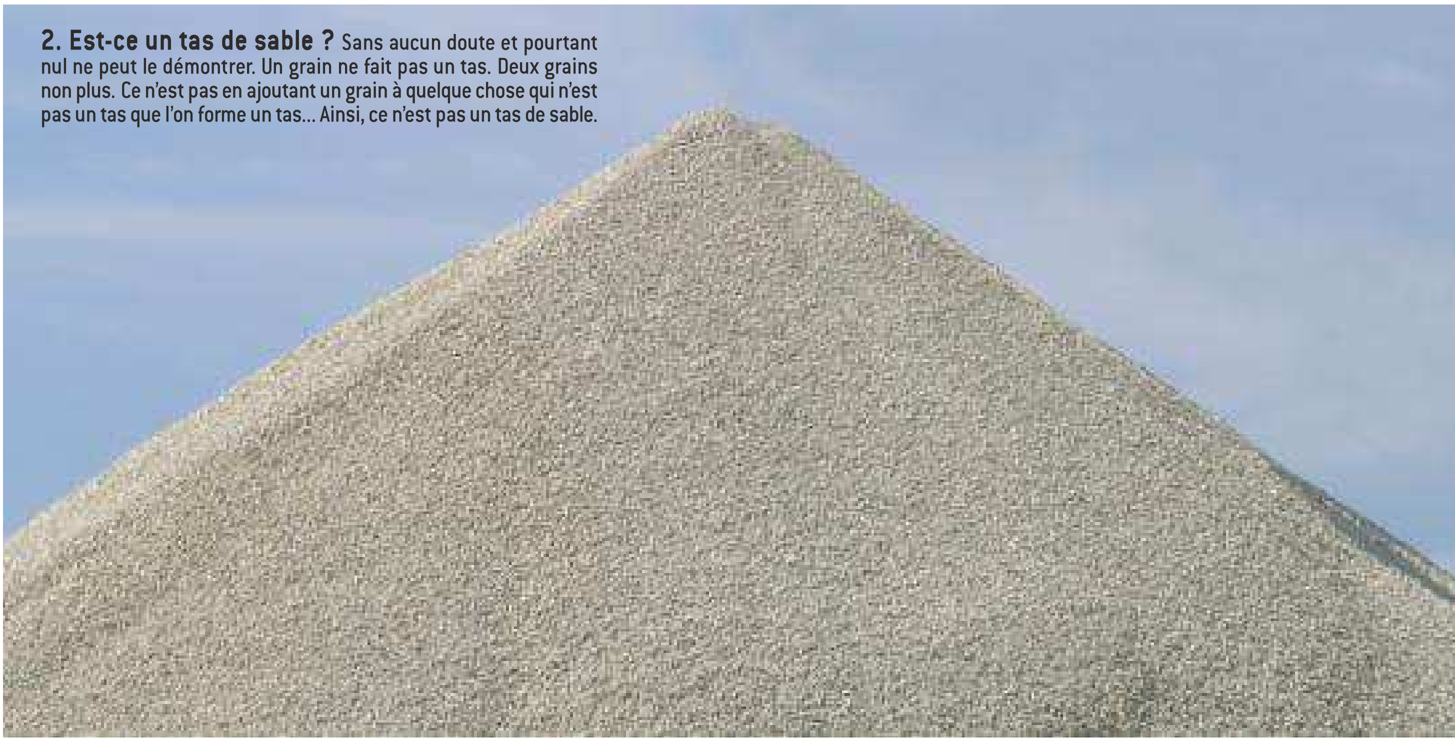
Tous les termes d'observation sont flous, au sens où l'on peut toujours tolérer une petite variation, impossible à discerner, dans leurs conditions d'application. Si l'on enlève quelques molécules à une table, elle reste évidemment une table. Et peut-on dire qu'il y a un moment où lui enlever un atome supplémentaire fera qu'elle cessera d'être une table ? Il semble que non. Si tous les termes d'observation sont flous, on voit que la science ne saurait pas plus se passer d'une réflexion sur la nature du vague que la logique ou la philosophie. Le rêve frégéen d'un langage scientifique parfaitement précis, dont tous les termes auraient des frontières d'application nettement délimitées, apparaît donc parfaitement irréalisable. Mais alors, que faire du vague ? Les philosophes ont développé au moins trois grandes stratégies, qui correspondent à autant de façons différentes d'interpréter les paradoxes sorites.

Les degrés de vérité et les ensembles flous

Une première stratégie possible consiste à abandonner le principe de bivalence, et la conception classique de la prédication qui va avec. Selon la conception classique, ou bien un prédicat s'applique à un objet, ou bien il ne s'y applique pas. Il n'y a pas de troisième possibilité. Mais l'existence de termes vagues peut nous conduire à reconsidérer cette conception. Ne pourrait-on pas dire que des termes comme *grand*, *chauve* ou *personne* s'appliquent « plus ou moins » aux objets ? Ainsi, *grand* s'appliquerait à un très faible degré à Charles de Gaulle âgé de six mois, mais en revanche à un très haut degré à Charles de Gaulle âgé de 50 ans. À mesure que Charles de Gaulle grandit, on peut considérer selon cette perspective non classique que le prédicat *grand* peut lui être appliqué à un degré de plus en plus élevé. S'il est justifié, selon les circonstances, d'appliquer un terme à un plus ou moins haut degré à un objet, on peut tout aussi bien parler de degré de vérité d'une proposition. Ainsi, la proposition « De Gaulle est grand » est vraie à un degré beaucoup moins élevé à l'âge de 10 ans qu'à l'âge de 30 ans.

Parler de degré de vérité d'une proposition revient évidemment à abandonner définitivement le principe de bivalence. Selon la logique classique, une proposition est soit vraie, soit fausse, sans qu'il soit possible qu'elle ait d'autres valeurs que ces deux-là. L'idée que nous sommes en train d'examiner revient à considérer qu'une proposition peut posséder tout un continuum de valeurs, par exemple dans un intervalle [0,1]. Il est possible de développer à la fois une théorie des ensembles – la théorie des ensembles flous – et une logique – la logique floue – à partir de cette hypothèse. Dans la théorie des ensembles flous, l'appartenance d'un élément à un ensemble est une question de degré : de Gaulle âgé de 10 ans appartient à un moins haut degré à l'ensemble des individus qui sont grands que de Gaulle âgé de 20 ans, par exemple.

Ce cadre non classique fournit une analyse mathématique élégante des paradoxes sorites. La règle du *modus ponens* conserve la vérité des prémisses, mais rien ne dit qu'elle conserve les degrés de vérité. Supposons que P soit vraie absolument, et que « Si P, alors Q » soit aussi vraie absolument. Par *modus ponens*, il en découle que Q est vraie absolument. Mais que se passe-t-il si – comme dans un argument sorite – P et « Si P, alors Q » ne sont vraies qu'à un certain degré ? Considérons l'exemple du tas de sable. Il est vrai à un certain degré *n* que trois grains ne font pas un tas ; par ailleurs, il est vrai aussi à un degré différent *m* que si trois grains ne font pas un tas, alors quatre grains non plus. On peut conclure qu'il est vrai à un certain degré *k* que quatre grains ne font pas un tas. Mais la chose importante, c'est que le degré de vérité de cette proposition



2. Est-ce un tas de sable ? Sans aucun doute et pourtant nul ne peut le démontrer. Un grain ne fait pas un tas. Deux grains non plus. Ce n'est pas en ajoutant un grain à quelque chose qui n'est pas un tas que l'on forme un tas... Ainsi, ce n'est pas un tas de sable.

Shutterstock/Djorje Zoric

est moins élevé que le degré de vérité de la première prémisse : « Quatre grains ne font pas un tas » est moins vrai que « Trois grains ne font pas un tas ». Le *modus ponens* ne conserve pas le degré de vérité de la prémisse. Du coup, les prémisses d'un argument sorite peuvent être toutes vraies à un très haut degré, même si la conclusion n'est vraie qu'à un très faible degré (et en fait, intuitivement, presque parfaitement fausse) : à chaque application du *modus ponens*, une partie du degré de vérité de la première prémisse est perdue ; si l'on applique la règle un grand nombre de fois, comme c'est le cas dans un sorite, il est tout à fait possible que le degré de vérité de la conclusion soit proche de zéro.

Des concepts en attente de précision

La logique floue est un outil mathématique intéressant, mais on peut douter sérieusement qu'elle nous aide vraiment à comprendre les problèmes philosophiques posés par les termes vagues. Supposons en effet que l'on adopte l'analyse non classique que nous venons de proposer. On rendra alors compte du vague d'une proposition comme « À 15 ans, Charles de Gaulle était déjà grand » en affirmant par exemple que la proposition « À 15 ans, Charles de Gaulle était déjà grand » est vraie à un degré supérieur à 0,8. A-t-on alors analysé le vague ? On peut en douter, car l'analyse proposée est elle-même très vague. Certes, la valeur numérique 0,8 est parfaitement précise. Mais la notion d'une proposition vraie à un certain degré apparaît, elle, parfaitement vague. Comment distinguer en effet une situation dans laquelle la proposition « À 15 ans, Charles de Gaulle était déjà grand » est vraie au degré 0,8 d'une situation dans laquelle cette proposition est vraie au degré 0,79, ou bien au degré 0,81 ? La logique floue voudrait rendre compte du vague qui existe dans l'application de certains prédicats en rejetant le principe de bivalence, et en le remplaçant par l'idée que les prédicats s'appliquent aux objets à un certain degré. Par exemple, on dira que la proposition « Cette robe est rouge » n'est ni absolument vraie ni absolument fausse, mais vraie au degré 0,84. Mais est-il approprié d'associer un prédicat vague comme *rouge* avec une fonction parfaitement définie et déterminée des objets d'un domaine de discours vers l'intervalle [0,1] ? Pourquoi le prédicat s'appliquerait-il, dans une certaine situation, avec un degré 0,84, mais ne s'appliquerait-il pas dans une autre avec un degré 0,80 ? La difficulté qu'il semble y avoir à apporter des réponses à ces questions peut nous mener à considérer la logique floue comme un outil de modélisation utile plutôt que comme une véritable élucidation de la nature du vague.

Un prédicat vague a des frontières floues ; cela revient à dire, comme nous l'avons vu, qu'un tel prédicat ne divise pas de façon précise le domaine de discours entre d'un côté les objets auxquels on peut l'appliquer correctement, et de l'autre l'ensemble des autres objets. Dans les cas frontières, on ne peut ni dire que le prédicat s'applique à un objet ni dire qu'il ne s'y applique pas. Certains philosophes considèrent que ces violations du principe de bivalence sont dues à une déficience, ou à une incomplétude, dans la signification des concepts vagues. Si l'on ne sait pas exactement quelle est l'extension du prédicat *grand*, selon cette conception, c'est en quelque sorte parce que sa signification n'est pas complètement déterminée. Selon cette approche, un prédicat vague doit en principe toujours pouvoir être précisé ; et préciser un tel prédicat revient à déterminer de façon parfaitement exacte l'ensemble des objets auxquels on peut l'appliquer.

Pour terminer, mentionnons une conception du vague qui, pour être étonnante de prime abord, apparaît aujourd'hui comme l'une des plus prometteuses : l'approche épistémique de Timothy Williamson. Il rejette l'un des éléments fondateurs dont nous sommes partis, à savoir la thèse selon laquelle les concepts vagues ont des limites floues. Selon lui, il existe, par exemple, bel et bien une seconde, dans la vie de Charles de Gaulle, à laquelle celui-ci est devenu grand. Cette seconde existe, et elle est parfaitement déterminée ; simplement, nous ne pouvons pas la découvrir, en raison des limitations de nos connaissances.

Un manque de connaissance ?

Le vague, selon T. Williamson, n'est pas dû à une imprécision de nos concepts, mais plutôt à notre ignorance quant à leur extension exacte. La différence entre un terme vague et un terme précis ne réside pas en ce que le premier, contrairement au second, aurait des frontières vagues d'application, mais plutôt en ce que nous connaissons les frontières exactes du second, mais pas celles du premier. L'ignorance joue également un rôle important dans les paradoxes sorites. Il y a bien, selon la conception du vague, un nombre n de grains de sable à partir duquel on peut dire que n grains constituent un tas, ou un nombre n de cheveux perdus à partir duquel on peut dire qu'un chevelu devient chauve. Simplement, nous ignorons ces nombres, et nous sommes destinés, du fait de nos limitations cognitives, à continuer à les ignorer.

À y regarder de plus près, on constate que dans de multiples domaines de la science, existent des frontières floues où l'on passe d'un état – bien défini – à un autre – bien défini – sans savoir précisément à quelle seconde ou sans connaître le nombre n (d'atomes, de gènes, etc.) concernés. Ces passages aussi flous que le moment où Charles de Gaulle devint grand existent en physique (le passage de la physique classique à la physique quantique ou le passage de l'état liquide à l'état solide), en biologie (le passage de l'état inerte à la vie, de la conscience au coma, d'une espèce à une autre), en astrophysique (les limites de l'héliosphère, celles de l'Univers), en mathématiques, etc. Le concept du vague a le mérite de sauvegarder la logique classique tout en expliquant comment les frontières floues et les paradoxes sorites peuvent apparaître.

Pascal LUDWIG est maître de conférences en philosophie, à l'Université de Paris-Sorbonne (Paris IV) et membre de l'Institut Jean-Nicod.

Vagueness : a reader, sous la direction de R. Keefe et P. Smith, Cambridge, Bradford Book, 1997.

T. WILLIAMSON, *Vagueness*, Routledge, 1994.