Les mathématiques des frontières floues

Qu'est-ce que la frontière d'un ensemble ? Les premières définitions précises ont 100 ans, mais les mathématiciens continuent d'en élaborer afin de prendre en compte le caractère flou de certains objets.

Stéphane Dugowson

En tous domaines, nous nous étonnons que des frontières se révèlent floues. Il y a pourtant des raisons mathématiques de penser que, s'agissant des frontières, le flou n'est pas l'exception mais la règle, et que c'est au contraire la netteté qui est exceptionnelle. Qu'une telle affirmation s'appuie sur les mathématiques, science exacte par excellence, pourrait paraître paradoxal. Ce serait oublier que cette exactitude est justement ce qui leur permet d'aborder de façon rigoureuse l'incertain ou l'approximatif. En témoignent la théorie des probabilités, l'analyse (l'étude des fonctions, avec l'encadrement des erreurs et les notions de convergence et de passage à la limite), mais aussi la théorie des ensembles flous, introduite en 1965 par Lotfi Zadeh, informaticien et mathématicien américain d'origine azerbaïdjanaise.

Selon la définition donnée par L. Zadeh, un sous-ensemble flou F d'un ensemble donné E est caractérisé par une fonction, dite fonction d'appartenance ; à chaque élément x de E, cette fonction associe un nombre compris entre 0 et 1, qui exprime le degré d'appartenance de x au sous-ensemble F. Graphiquement, on peut représenter un tel sous-ensemble en associant à chaque degré d'appartenance un niveau de gris intermédiaire entre le noir, associé au degré 0 (x n'appartient pas du tout à F), et le blanc, associé au degré 1 (x appartient complètement à F) *(voir la figure 3).*

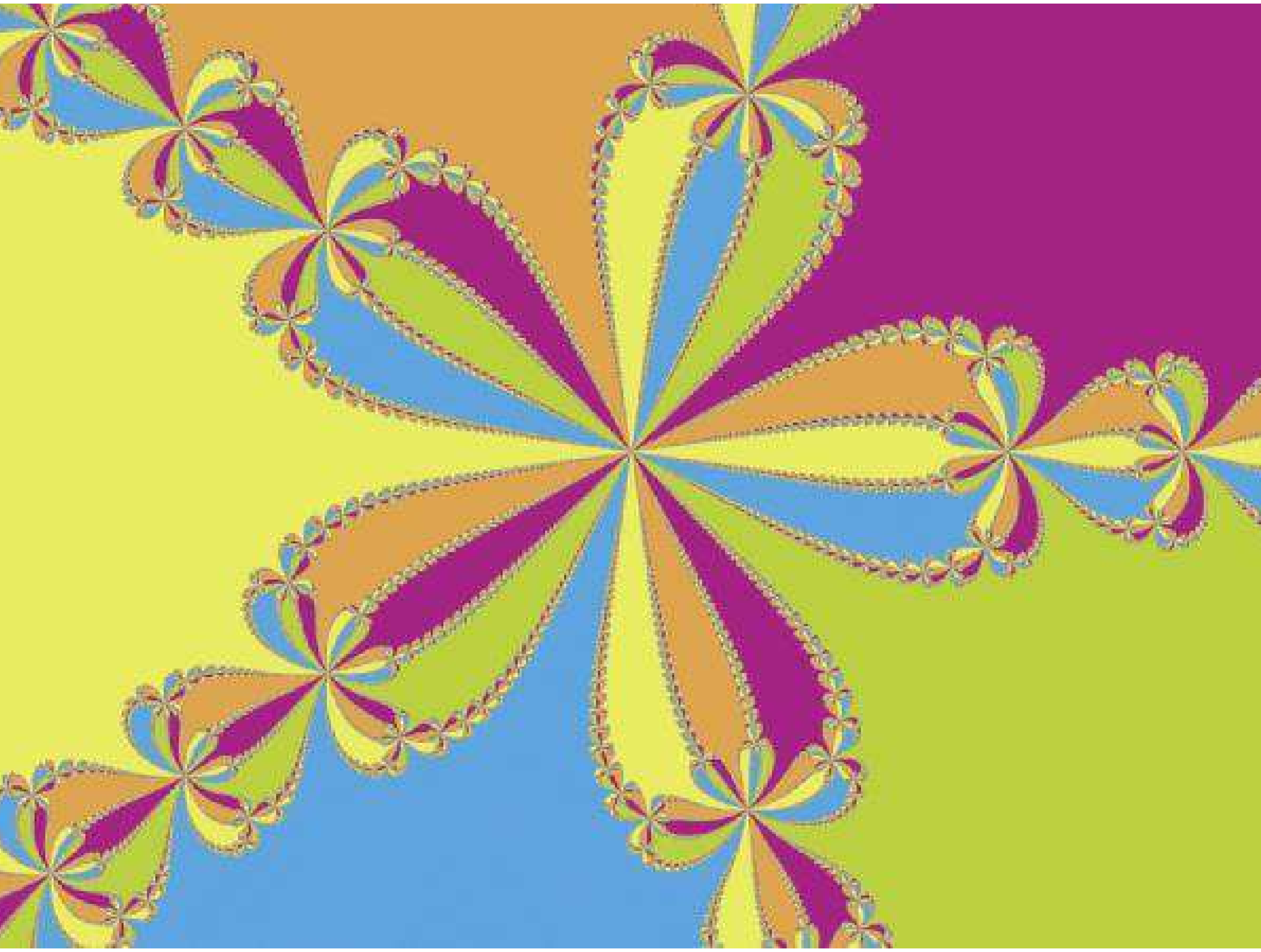
La théorie des ensembles flous s'est révélée intéressante pour de nombreuses applications. L'existence de définitions précises pour la frontière des parties floues (« partie » est ici synonyme de « sous-ensemble ») serait utile, en particulier dans le domaine de l'analyse automatique des images. Or l'élaboration de telles définitions a fait l'objet de plusieurs recherches mathématiques au cours des 30 dernières années. Pour donner une idée de la nature de ces travaux, nous commencerons par présenter quelques-unes des notions topologiques développées au début du XX^{e} siècle, notamment par le Hongrois Frigyes Riesz, le Français Maurice Fréchet, l'Allemand Felix Hausdorff et le Polonais Kazimierz Kuratowski. C'est en effet en topologie que se trouve définie de façon générale la frontière d'une partie d'un espace, définition qu'il s'agit de généraliser au cas des ensembles flous.

Les premières définitions générales en topologie datent de janvier 1906, lorsque Riesz prononce à l'Académie hongroise des sciences une conférence dans laquelle il choisit comme notions topologiques premières celles de « points isolés » et de « points d'accumulation » d'une partie F d'un espace E. La notion de points d'accumulation avait initialement été introduite par Georg Cantor, vers la fin du XIX^{e} siècle, pour les besoins de ses recherches sur l'analyse des fonctions. Intuitivement, les points d'accumulation de F sont les points qui appartiennent ou non à F, mais dont le voisinage immédiat contient une infinité de points de F. Les points isolés de F sont ceux qui, au contraire, n'admettent de cette partie aucun autre point qu'eux-mêmes dans leur voisinage immédiat.

Au royaume de la topologie

Pour illustrer ces notions, considérons l'espace E dont les points sont les nombres réels (E est donc la droite numérique) et le sous-ensemble F formé d'une part du nombre 3 et d'autre part des nombres supérieurs ou égaux à 0 et strictement inférieurs à 1 *(voir la figure 2).* Dans cet exemple, le nombre 3 est un point isolé de F, tandis que le nombre 0 est un point d'accumulation de F, car il y a une infinité de nombres appartenant à F au voisinage de 0 ; en fait, tous les points compris entre 0 et 1, extrémités incluses, sont des points d'accumulation de F.

Bien sûr, pour formuler rigoureusement ses définitions, Riesz ne s'est pas appuyé sur des notions intuitives comme celle de « voisinage immédiat », mais a caractérisé directement les notions en question par une liste d'axiomes.



Riesz dit ensuite d'un point de F qu'il est « périphérique » pour F, ou qu'il est « au bord » de F, s'il est aussi un point d'accumulation du complémentaire de F (le complémentaire d'une partie F d'un espace E est l'ensemble des points de E qui n'appartiennent pas à F). Sur l'exemple donné plus haut, c'est le cas des points 0 et 3 : ils sont dans F, mais leur voisinage immédiat contient une infinité de points n'appartenant pas à F.

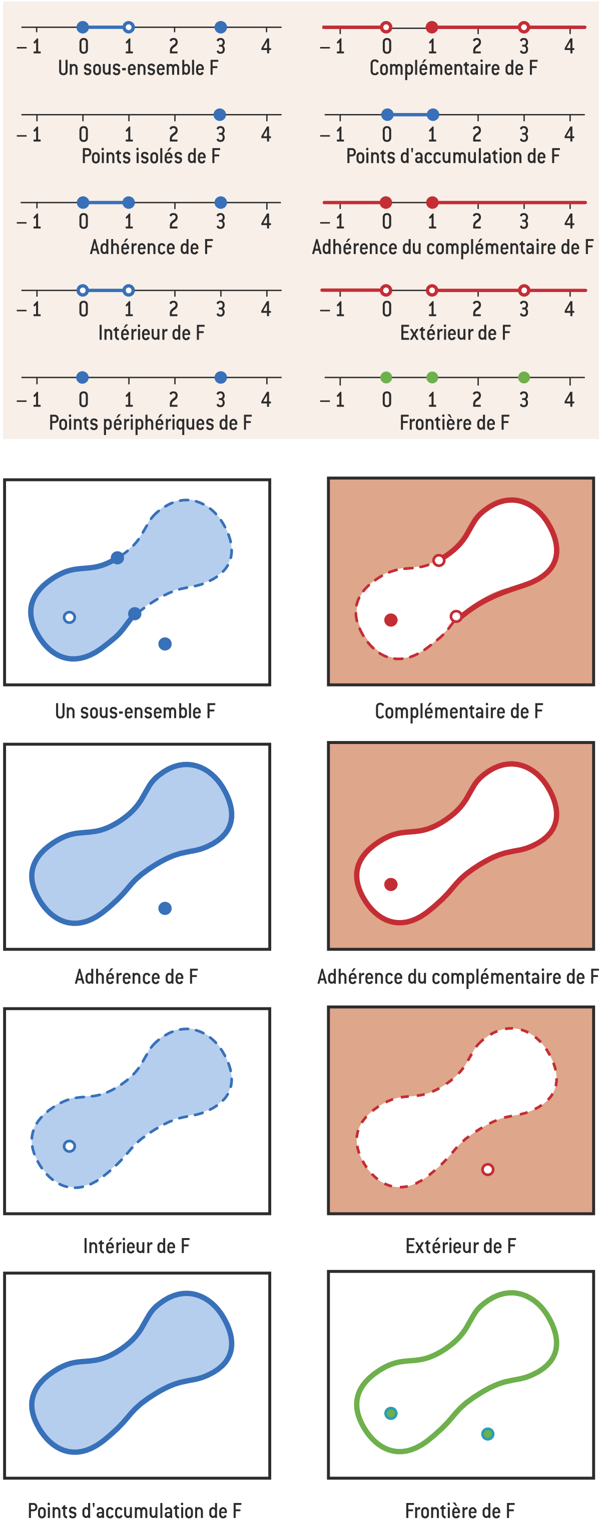
Riesz définit ensuite la frontière de F comme constituée d'une part de ses propres points périphériques (le bord interne), et d'autre part de ceux de l'autre bord, c'est-à-dire des points périphériques du complémentaire de F (le bord externe) *(voir la figure 5a)*. Dans notre exemple, le complémentaire de F admet un seul point périphérique, 1, et la frontière de F est donc finalement constituée des trois points 0, 1 et 3.

Également en 1906, mais indépendamment de Riesz, Fréchet posa des définitions équivalentes dans le cadre plus restrictif, mais essentiel, des espaces où est définie une distance entre les points (les espaces métriques, comme Hausdorff les nommera). Hausdorff proposa en 1914 une théorie axiomatique un peu moins générale que celle de Riesz (dont il ignorait les travaux), mais très proche, dans sa formulation, de la théorie topologique actuelle, qui est plus générale. Selon celle-ci, un espace topologique E est un ensemble

1. La frontière d'un ensemble peut être très compliquée et néanmoins nette. C'est le cas avec cette fractale, où les régions colorées sont parfaitement définies sur le plan mathématique (elles sont liées à la résolution, par une méthode numérique dite de Newton, de l'équation $z^5 = 1$, qui a cinq racines complexes ; chaque couleur correspond aux points initiaux z qui, par l'algorithme de Newton, convergent vers une même racine). Les notions habituelles de la topologie permettent d'analyser de telles frontières (en revanche, les questions de connexité qu'elles soulèvent relèvent aussi d'autres théories). Mais il faut les généraliser pour prendre en compte d'autres types de frontières, notamment celles des ensembles flous. *(Image issue d'une simulation numérique, réalisée par Jean-François Colonna.)*

muni d'une « topologie », c'est-à-dire d'un ensemble de parties de E, nommées ouverts et vérifiant les trois axiomes suivants : l'espace entier E est un ouvert ; l'intersection de deux ouverts quelconques est un ouvert ; l'union d'une famille quelconque d'ouverts est un ouvert.

Intuitivement, un ouvert est une partie de E qui ne rencontre pas sa frontière. Par exemple, dans le cas de la droite numérique, les intervalles constitués des nombres strictement compris entre deux bornes (tel l'intervalle]0, 1[), sont des ouverts. Les réunions de tels intervalles ouverts sont également des ouverts. Pour tout espace topologique E, on définit alors les fermés comme étant les complémentaires des ouverts. Intuitivement, ce sont les parties de E qui contiennent leur frontière.



2. Quelques notions topologiques de base, illustrées sur un exemple de la droite numérique *(schéma du haut)* et sur un exemple dans le plan *(schéma du bas)*. Un petit cercle non rempli signifie que le point correspondant est exclu ; les pointillés signifient que les points de la courbe correspondante sont exclus. Dans l'exemple de la droite numérique, le sous-ensemble F considéré *(en bleu)* est l'ensemble des nombres réels x tels que $x = 3$ ou $0 \leq x < 1$. Un point x est adhérent à F si tout voisinage de x contient au moins un point de F ; c'est notamment le cas ici de $x = 1$ et de $x = 3$. L'adhérence de F est la réunion de F et de ses points adhérents. La frontière de F correspond à l'intersection de l'adhérence de F avec l'adhérence du complémentaire de F.

De là découlent, dans ce système, toutes les autres notions topologiques. Ainsi, l'intérieur d'une partie F est défini comme le plus grand ouvert contenu dans F. L'adhérence (ou la fermeture) de F est le plus petit fermé contenant F. L'extérieur de F est le complémentaire de son adhérence (ou, ce qui revient au même, c'est l'intérieur de son complémentaire). On définit ensuite la frontière de F comme l'ensemble des points appartenant à l'adhérence de F, mais non à son intérieur. Cela équivaut à dire que la frontière de F est l'intersection de son adhérence avec l'adhérence de son complémentaire, définition que nous allons réutiliser dans la suite *(voir les figures 2 et 5)*.

Parmi les autres notions topologiques fondamentales, citons la connexité, c'est-à-dire le fait pour un ensemble d'être d'un seul tenant. Ainsi, dans notre exemple de la droite numérique, la partie F n'est pas connexe puisqu'elle est constituée de deux « morceaux » : d'une part le point isolé 3, et d'autre part l'intervalle [0, 1[. Mentionnons enfin la notion capitale de continuité, propriété caractérisant les transformations qui ne « déchirent » pas les espaces auxquels elles s'appliquent.

En topologie générale, discipline qui sert de socle à de nombreux autres domaines des mathématiques, pures ou appliquées, la notion de frontière est étroitement liée aux autres concepts fondamentaux. Par exemple, un théorème fondamental et intuitivement évident stipule que tout ensemble connexe qui rencontre une partie F et son complémentaire rencontre aussi la frontière de F. Mais il existe aussi des liens plus profonds et moins immédiats. L'un d'eux se traduit par le théorème de Stokes (ou formule de Stokes), qui fait jouer aux frontières un rôle clef dans nombre d'équations issues de la physique ou des sciences de l'ingénieur.

Un rôle clef pour les frontières

Le théorème de Stokes fait intervenir les frontières sous une forme particulière, celle de bords orientés *(voir l'encadré page 130)*. Il exprime un principe général de conservation, selon lequel le bilan des transformations qui se produisent dans un domaine peut se lire sur ce qui se passe à sa frontière. Un cas particulier très simple de cette formule est bien connu des bacheliers : l'intégrale sur un intervalle $[a, b]$ de la dérivée f' d'une fonction f est égale à la différence $f(b) - f(a)$ des valeurs prises par f aux bornes de cet intervalle, c'est-à-dire sur sa frontière.

Revenons un instant à l'histoire de la topologie générale. Le point de vue de Hausdorff sur la topologie, fondé sur la notion première d'ouverts, est devenu le point de vue classique. Mais il n'est pas le seul. En 1920, Kuratowski proposa une autre approche où la notion première est celle d'adhérence. Intuitivement, l'adhérence d'une partie F est constituée des points qui « collent au plus près » à F *(voir la figure 2)*. Selon le point de vue de Kuratowski, une opération qui à toute partie F en associe une autre F^* est considérée comme une « adhérence » dès qu'elle vérifie les quatre conditions suivantes : l'adhérence de la partie vide est vide ; toute partie F est incluse dans son adhérence F^* ; l'adhérence de l'union de deux parties F_1 et F_2 est égale à l'union de leurs adhérences $F_1{}^*$ et $F_2{}^*$; l'adhérence de l'adhérence d'une partie F est égale à F^*, l'adhérence de F.

La définition de Kuratowski s'avère équivalente à la définition actuelle des espaces topologiques. On retrouve celle-ci en nommant « fermés » les parties égales à leur adhérence, puis « ouverts » les complémentaires des fermés. Le point de vue de Kuratowski présente toutefois certains avantages. Notamment, la définition de la continuité des fonctions est plus simple en termes d'adhérence qu'en termes d'ouverts. Par ailleurs, ce système se prête aisément à des généralisations utiles : pour ce faire, on affaiblit les conditions qui pèsent sur les adhérences.

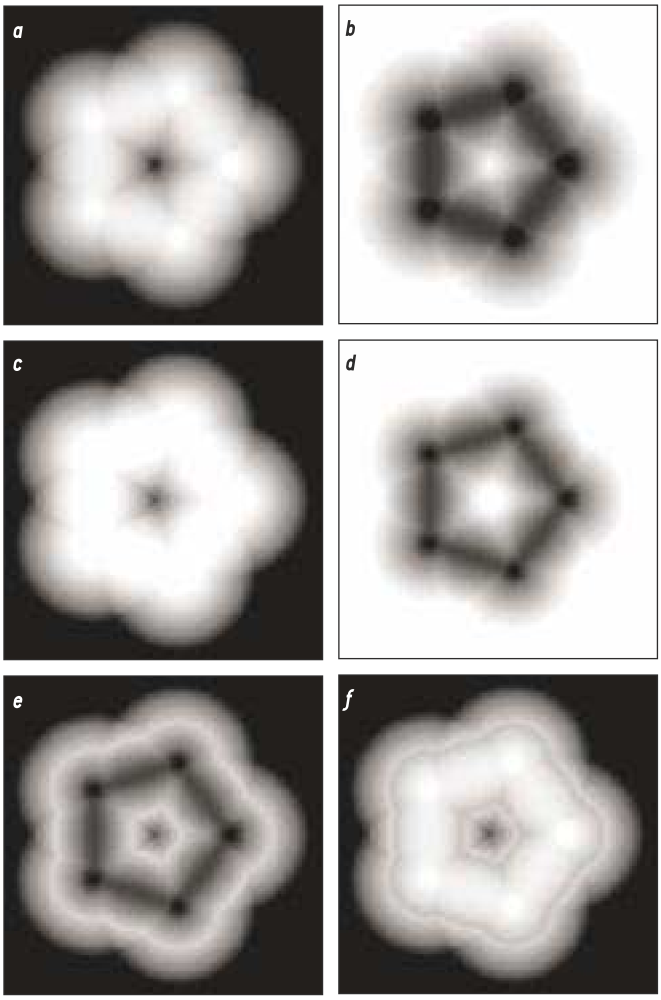
Ainsi, au début des années 1970, Marcel Brissaud et les autres chercheurs français du groupe Z. Belmandt ont désigné par l'expression « adhérences prétopologiques » les opérations sur les parties d'un ensemble qui vérifient (au moins) les deux premiers axiomes de Kuratowski. La notion d'adhérence ainsi généralisée est très simple, puisqu'elle désigne toute opération qui associe à chaque partie non vide d'un ensemble une partie plus vaste qu'elle. Elle s'applique notamment à des graphes (un graphe étant un ensemble de points, les sommets, reliés ou non par des arêtes) : l'opération qui, à tout ensemble de sommets d'un graphe, ajoute ceux qui lui sont directement connectés, est une adhérence prétopologique. Cette notion d'adhérence, moins restrictive que l'adhérence à la Kuratowski, permet de forger une « prétopologie », avec en particulier des frontières prétopologiques définies de la même façon qu'en topologie classique, c'est-à-dire en posant que la frontière (prétopologique) d'une partie F est l'intersection de l'adhérence (prétopologique) de F avec l'adhérence (prétopologique) du complémentaire de F.

Abandonner la symétrie

Nous avons vu que les structures topologiques peuvent être définies en prenant pour notion première celle d'ouverts ou celle d'adhérence. En fait, il est également possible de partir de la frontière, considérée comme une notion première devant satisfaire à cinq axiomes : la frontière de l'ensemble vide est vide ; deux parties complémentaires ont la même frontière (symétrie des frontières) ; les frontières respectives de deux parties quelconques A et B sont incluses dans l'union de A et B, augmentée de la frontière de cette union ; la frontière de l'union de A et B est incluse dans l'union de leurs frontières ; la frontière d'une frontière est incluse dans cette dernière.

Dans ce système, le passage de la topologie à la prétopologie correspond au retrait des trois derniers axiomes. Toutefois, ce n'est pas encore la structure la plus générale, car on rencontre des cas où la propriété de symétrie (coïncidence de la frontière d'une partie F avec la frontière du complémentaire de F) n'est pas vérifiée. Ainsi, au jeu de Go, les frontières ne sont pas symétriques : deux parties complémentaires n'y ont pas la même frontière *(voir la figure 4)*. Pour rendre compte de telles frontières non symétriques, il s'est révélé nécessaire de faire appel non plus à une structure prétopologique unique, mais à un couple de telles structures.

J'ai en effet montré récemment que la donnée d'un tel couple équivaut à l'attribution d'une frontière de ce type à



3. Le degré d'appartenance d'un point à un sous-ensemble flou peut être représenté par des niveaux de gris intermédiaires entre le noir (totale non-appartenance) et le blanc (appartenance totale). Partant d'un sous-ensemble flou F *(a)*, on peut ainsi représenter : le complémentaire de F *(b)* ; l'adhérence floue de F *(c)* ; l'adhérence du complémentaire de F *(d)* ; l'intersection de l'adhérence de F et de l'adhérence du complémentaire de F, c'est-à-dire la frontière floue de F au sens des mathématiciens chinois Pu et Liu *(e)* ; l'union de F et de sa frontière *(f)*. Les images *c*, *d*, *e* et *f* dépendent des structures (pré)topologiques choisies, qui déterminent les adhérences et les frontières.

chaque partie de l'espace considéré. Comment la frontière d'une partie F est-elle définie dans ce cas ? De façon analogue au cas classique (intersection de l'adhérence de F avec l'adhérence du complémentaire de F) : si l'on note a_1 l'opération d'adhérence associée à la première prétopologie et a_2 celle associée à la seconde, la frontière de F est l'intersection de $a_1(F)$ avec $a_2(E \setminus F)$, où $E \setminus F$ désigne le complémentaire de F dans E. Cette frontière est clairement asymétrique : elle diffère de la frontière du complémentaire de F, égale par définition à l'intersection de $a_1(E \setminus F)$ avec $a_2(F)$.

J'ai qualifié ces frontières de dialectiques, car elles articulent deux « logiques » de l'espace, régissant respectivement l'intérieur (pour a_1) et l'extérieur (pour a_2) des parties de l'espace considéré. On peut montrer que les structures dialectiques s'organisent en hiérarchies analogues à celles liées à d'autres types de structures (topologiques, prétopologiques, etc.), ce qui permet de les combiner. Or l'une des hiérarchies les plus simples de ce genre est précisément celle constituée par les sous-ensembles flous d'un ensemble donné. Les structures dialectiques conduisent ainsi naturellement à considérer des frontières floues.

Une remarque beaucoup plus élémentaire conforte le passage des situations nettes aux situations floues. Vis-à-vis d'un sous-ensemble donné F, chaque point de E est soumis à une alternative binaire (faire partie de F ou non, ce que l'on peut coder par les deux nombres 1 et 0). Les frontières font apparaître une gamme plus large de possibilités : être à l'intérieur de F, sur son bord interne, sur son bord externe ou à l'extérieur de F *(voir la figure 5)*. De là à s'orienter vers la gamme continue de valeurs d'appartenance considérées par L. Zadeh, il n'y a qu'un pas.

Topologies floues pour frontières floues

Dans l'article fondateur de L. Zadeh de 1965, les ensembles flous étaient présentés intuitivement comme des ensembles ayant des frontières floues. Mais cette dernière notion n'y était pas définie, puisque l'objectif de L. Zadeh à ce stade était seulement de définir les opérations de base sur les ensembles flous, telles que l'union ou l'intersection de deux ensembles, ou le passage au complémentaire. Par exemple, l'union de deux sous-ensembles flous F_1 et F_2 s'obtient en assignant à chaque point x de E le degré maximal d'appartenance à F_1 ou à F_2 ; autrement dit, si x appartient à F_1 avec le degré d_1 et appartient à F_2 avec le degré d_2, le degré d'appartenance de x à l'union de F_1 et de F_2 est égal au plus grand des deux nombres d_1 et d_2. De la même façon, l'intersection de F_1 et de F_2 est définie en attribuant à x le plus petit des deux nombres d_1 et d_2. Quant au complémentaire d'une partie floue, il s'obtient en remplaçant chaque degré d'appartenance d par le degré $1 - d$. Si les degrés d'appartenance sont représentés par des niveaux de gris, cette dernière opération revient à inverser toute la gamme de gris *(voir la figure 3)*.

En 1968, l'Américain C. L. Chang transposa aux parties floues d'un ensemble la définition classique d'une topologie par les ouverts. Il inaugurait ainsi la topologie floue, devenue depuis une branche à part entière des mathématiques. Comme pour la topologie classique, chaque structure topologique floue se traduit notamment par l'existence d'une opération d'adhérence floue agissant sur les sous-ensembles flous de l'espace considéré. En 1981, le Français Robert Badard a élargi la notion aux espaces prétopologiques flous, par une définition similaire à celle posée par M. Brissaud et ses collègues dans le cas net.

Chang aurait pu écrire immédiatement une définition des frontières floues calquée sur la définition classique (prendre l'intersection de l'adhérence et de l'adhérence du

Frontières, bords, limites : du flou dans la terminologie

Les termes mathématiques *bord*, *frontière* et *limite* s'entendent en plusieurs sens, dont certains se recouvrent en partie. On peut dire que, le plus souvent, contrairement aux frontières, les bords sont « tournés vers l'intérieur ». Ainsi, le terme allemand employé par Riesz et Hausdorff pour désigner la partie interne d'une frontière est souvent traduit par bord, et c'est également le terme employé (en français) par Kuratowski. Toutefois, cet usage du mot bord reste marginal.

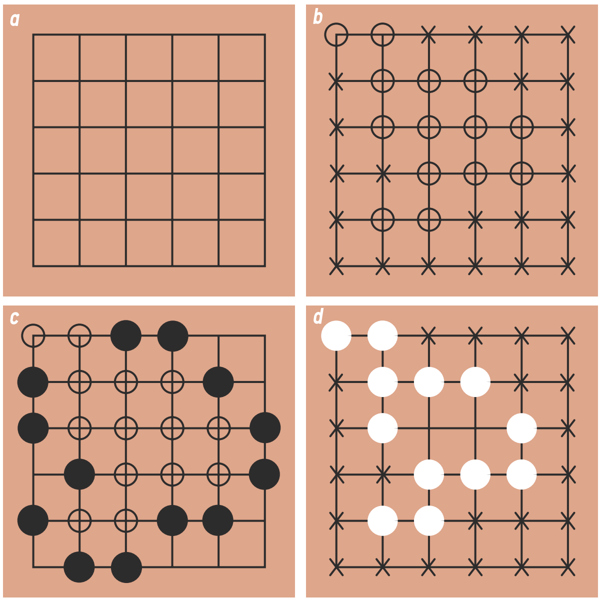
Ce qui distingue l'usage mathématique de ces deux termes est plutôt le type d'objets auxquels ils s'appliquent. La notion de frontière s'applique surtout aux parties quelconques d'un espace de nature topologique. La notion de bord, elle, concerne avant tout des variétés, c'est-à-dire des espaces présentant une certaine régularité (comme le fait de posséder une dimension : les courbes sont des variétés de dimension un, les surfaces de dimension deux, etc.) et dont la définition se réfère en dernière analyse à la topologie particulière de la droite des nombres réels.

La frontière de la partie pleine d'un espace topologique E, c'est-à-dire de E pris en entier, est toujours vide (car E n'a pas d'extérieur). En revanche, une variété peut ou non avoir un bord. Ainsi, la variété constituée par une surface sphérique n'a pas de bord (dans cet « univers », le déplacement d'un petit mobile n'est pas limité). Mais si l'on enlève un morceau de la surface sphérique, on obtient une variété à bord (le déplacement d'un mobile y est limité par le bord du morceau enlevé). Toutefois, une variété topologique peut toujours être prolongée au-delà de son bord en une variété plus vaste et, au sein de celle-ci, la frontière de la variété initiale coïncide alors avec le bord considéré.

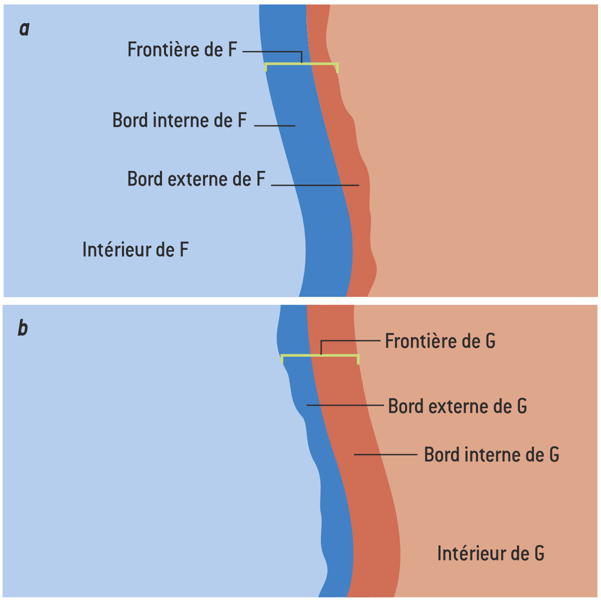
Une autre différence est que, le plus souvent, les bords d'une variété sont orientés : il existe en général deux orientations possibles (si le bord est une courbe, cela correspond aux deux sens de parcours le long de la courbe). Le choix d'une orientation confère aux bords une nature algébrique (ils sont affectés d'un signe positif ou négatif), alors qu'une telle notion n'a pas toujours de sens pour des frontières topologiques générales.

Dans l'étude des équations aux dérivées partielles, initialement limitée à des sous-variétés de l'espace euclidien usuel et pour laquelle l'orientation répond toujours aux mêmes conventions, les termes de bord et de frontière deviennent interchangeables. Dans ce contexte, on parle indifféremment du bord ou de la frontière d'un domaine. On parle aussi, dans le même sens, des « limites » d'un tel domaine. Tel est le cas en particulier dans l'expression « conditions aux limites », qui désigne des contraintes définies sur le bord, ou la frontière, du domaine considéré. Cet usage particulier du mot « limites » (toujours au pluriel) doit être distingué de son usage mathématique le plus fréquent, qui se rapporte au comportement de suites de nombres ou de fonctions (la limite d'une suite numérique, par exemple).

Enfin, les remarques précédentes doivent être modulées selon l'histoire et la langue. Ainsi, à la fin du XIX^e siècle, Henri Poincaré utilisait « frontière » pour désigner les bords des variétés. Et aujourd'hui, le même terme anglais *boundary* désigne selon le contexte une frontière topologique ou le bord d'une variété. Même en mathématiques, le sens des mots est parfois flou...



4. Le jeu de Go fournit un exemple simple de frontières non symétriques. Les points de l'espace de jeu sont les intersections des horizontales et des verticales (36 points sur le goban fictif illustré en *a*). L'ensemble F des points marqués d'un rond a pour complémentaire l'ensemble G de ceux marqués d'une croix *(b)*. Or la frontière de F, marquée par des pierres noires *(c)*, ne coïncide pas avec la frontière de G, marquée par des pierres blanches *(d)*.



5. La frontière d'un sous-ensemble F *(F est en bleu, son complémentaire G en rouge)* est en général définie par l'intersection de l'adhérence de F et de l'adhérence du complémentaire de F (l'adhérence de F correspond à ajouter à F son bord externe). Si la notion d'adhérence s'appliquant à un sous-ensemble diffère de celle appliquée à son complémentaire, on obtient une frontière asymétrique : la frontière de F *(a)* n'est pas identique à la frontière de G *(b)*.

complémentaire de la partie considérée). Mais il faudra attendre 1980 pour que deux mathématiciens chinois, Pao-ming Pu et Ying-ming Liu, posent cette définition. Pourquoi ce délai ? Parce qu'en passant au flou, on perd certaines propriétés des frontières ainsi définies. Ainsi, avec cette définition, le fait que l'union d'une partie et de sa frontière coïncide avec son adhérence, propriété importante dans le cas net, n'est plus vérifié.

L'embarras du choix

En revanche, cette propriété subsiste avec la première définition précise des frontières floues, donnée en 1977 par l'Américain Richard Warren et qui est à peine plus compliquée que la définition classique. Cependant, il n'est pas possible de conserver toutes les propriétés des frontières classiques, et R. Warren dut renoncer à la symétrie : une partie floue et son complémentaire ne partagent donc pas, en général, la même frontière au sens de R. Warren.

Dans les années 1980 et 1990, d'autres définitions des frontières floues suivront, améliorant celle de R. Warren ou explorant d'autres pistes, avec des structures plus complexes. J'ai pu montrer que parmi ces définitions, celles qui s'expriment dans le cadre de la topologie floue s'interprètent toutes comme des frontières dialectiques floues particulières. Comme dans le cas net, les frontières dialectiques floues font appel à des couples de prétopologies, floues en l'occurrence. Toutefois, il existe une grande diversité dans la façon d'attribuer des frontières aux régions que l'on souhaite analyser, et la première difficulté rencontrée est sans doute l'embarras du choix. Il est par exemple possible d'attribuer des frontières nettes à toutes les régions, même floues, mais il est également possible de faire en sorte que les frontières obtenues soient floues, y compris pour des régions nettes.

Dans cet article, nous n'avons considéré que la frontière d'une région, et non celle, plus élaborée mais qui en dépend, de frontière entre deux régions ou davantage. Dans le cas flou, l'étude de ce type de relations topologiques se développe activement depuis une dizaine d'années. Si elles sont parfois portées par un intérêt purement mathématique, ces recherches ont aussi en vue des applications, en particulier à l'analyse automatique des images et à la reconnaissance des formes – des questions qui intéressent notamment l'imagerie médicale et les systèmes d'information géographique. Il peut être ainsi crucial de délimiter avec précision des tumeurs détectées sur des radiographies, images qui présentent toujours un certain degré de flou. Une preuve supplémentaire que les mathématiques, même très abstraites, présentent souvent un double intérêt, théorique et pratique.

Auteur & Bibliographie

Stéphane DUGOWSON est professeur de mathématiques à l'Institut supérieur de mécanique de Paris, situé à Saint-Ouen.

S. DUGOWSON, *Les frontières dialectiques*, in *Mathématiques & Sciences Humaines*, à paraître.

S. DUGOWSON, *Les catégories et le passage des frontières*, conférence donnée à l'École normale supérieure, octobre 2005, accessible sur www.diffusion.ens.fr/index.php?res=conf&idconf=894.

D. DUBOIS et H. PRADE, *Traiter le flou et l'incertain*, in *Dossier Pour la Science* n° 49, *Les chemins de la logique*, octobre-décembre 2005.

C. AULL et R. LOWEN (éditeurs), *Handbook of the history of general topology*, Kluwer, 1997.

Z. BELMANDT, *Manuel de prétopologie et ses applications*, Hermès, 1993.